Solución ejercicios autocomprobación. Tema 10.

4. Calculamos los estimadores por el método de máxima verosimilitud.

   a) $f_\theta(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^\alpha} \qquad x > 0, \qquad \alpha > 0.$

   Se calcula la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L_\theta(x_1,\ldots,x_n) = L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \theta\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-\theta x_i^\alpha} \\ &= \theta^n\alpha^n\left[\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}\right]e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i^\alpha} \end{aligned}$$

   Su logaritmo:

$$LnL(\theta) = nLn\theta + nLn\alpha + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n Lnx_i - \theta\sum_{i=1}^n x_i^\alpha$$

   Se deriva con respecto del parámetro θ e igualamos a 0:

$$\frac{\partial LnL(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha$$

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0$$

   Despejamos θ, obteniendo $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}$$

   Hay que comprobar que el extremo de la función que hemos encontrado se corresponde con un **máximo**. Para ello, estudiamos el signo de la la derivada segunda evaluada en $\hat{\theta}$:

$$\frac{\partial^2 LnL(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

   Por lo que nos encontramos ante un máximo. Por tanto, el estimador de máxima verosimilitud para θ es:

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}$$

   b) $f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad \theta \ge 1$

   Construimos la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \theta(1-x_i)^{\theta-1} \\ &= \theta^n\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{\theta-1} \end{aligned}$$

Calculamos su logaritmo:

$$LnL(\theta) = nLn\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} Ln(1 - x_i)$$

Derivamos con respecto de θ:

$$\frac{\partial LnL(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} Ln(1 - x_i)$$

Igualamos a 0 la derivada y despejamos θ para obtener $\|\hat{theta}$:

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} Ln(1 - x_i) = 0$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1 - x_i)}$$

Antes de comprobar el signo de la segunda derivada hay que hacer algunas observaciones. Efectivamente, el resultado obtenido nos sirve para estimar un parámetro que, según el enunciado es $\theta \geq 1$ y, por tanto, positivo. Como los x_i están entre 0 y 1, su logaritmo es negativo y menor que 1, con lo que la expresión obtenida para $\hat{\theta}$ es positiva y ≥ 1.

Hacemos la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 LnL(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

Con lo que nos encontramos ante un máximo.

5. Calculamos el estimador por el método de los momento siendo:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}, \qquad x \geq x >_0 > 0$$

Para ello calculamos el primer momento con respecto del origen para la variable aleatoria cuya función de densidad es la anterior:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{x_0}^{\infty} x\frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1} dx \\
&= \theta x_0^\theta \int_{x_0}^{\infty} x^{-\theta} dx \\
&= \theta x_0^\theta \left.\frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\right|_{x_0}^{\infty} \\
&= \theta x_0^\theta \frac{x_0^{-\theta+1}}{\theta - 1} \\
&= \frac{\theta}{\theta - 1} x_0
\end{aligned}$$

A continuación, despejamos θ de la igualdad:

$$\alpha_1 = E(X) = \frac{\theta}{\theta - 1}\, x_0$$

$$\theta = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - x_0}$$

Sustituyendo $\alpha_1 = E(X)$ por su estimador $a_1 = \bar{x}$ se obtiene el estomador de θ por el método de los momentos, $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x_0}$$